

УДК 519.16

**Построение графа многогранника пирамидальных циклов**

А. В. Коростиль, А. В. Николаев

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

E-mail: av.korostil@gmail.com, andrei.v.nikolaev@gmail.com

**Аннотация**

Исследуются полиэдральные графы многогранников простых пирамидальных циклов и пирамидальных циклов с шагами назад. Численно находятся значения плотности и диаметра полиэдральных графов для многогранников небольшой размерности. Рассматриваемые характеристики, связанные со сложностью задач в некоторых классах алгоритмов.

*Ключевые слова:* пирамидальный цикл, полиэдральный граф, плотность графа, диаметр графа.

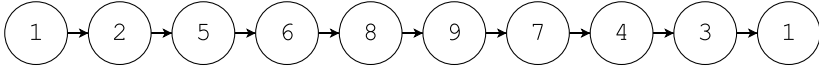
**Введение**

Рассматриваются многогранники задач на графах, которые строятся по следующим правилам:

1. Размерность равна числу ребер.
2. Каждое допустимое решение кодируется 0/1 вектором, где 1 — если ребро входит в решение, 0 — если не входит.
3. Многогранник задачи — выпуклая оболочка множества допустимых решений.

Полиэдральный граф задачи — неориентированный граф, образованный из вершин и рёбер выпуклого многогранника. Исследуются полиэдральные графы многогранников простых пирамидальных циклов и пирамидальных циклов с шагами назад. В частности, исследовались следующие две характеристики: диаметр графа  $d(G)$  — наибольшая длина кратчайшего пути между всеми парами вершин графа  $G$ , и плотность графа, или кликовое число,  $\omega(G)$  — число вершин в наибольшей клике графа  $G$ .

Исследование диаметра полиэдрального графа мотивировано тем, что данная величина является нижней оценкой на число невырожденных шагов симплекс-метода, а также известной гипотезой Хирша. Грётчел и Падберг [1] на основе полного описания многогранников коммивояжёра небольшой размерности и того факта, что для

Рис. 1: Пирамидальный цикл для  $n = 9$ 

асимметричной задачи диаметр полиэдрального графа равен 2, высказали следующее предположение.

**Гипотеза 1.** (Грётчел, Падберг [1])

$$\forall n \geq 5 : d(TSP(n)) = 2.$$

Плотность полиэдрального графа служит нижней оценкой вычислительной сложности в классе так называемых алгоритмов прямого типа, основанных на линейных сравнениях [2; 3].

### Задача коммивояжера с пирамидальными циклами

Рассматриваемый в статье многогранник построен на основе задачи коммивояжера. Как известно, эффективный алгоритм для задачи коммивояжера до сих пор не найден. Однако, существуют условия, при которых задача становится полиномиально разрешимой. К примеру, при некоторых ограничениях на матрицу расстояний в графе, оптимальный маршрут имеет специальный вид (например, пирамидальный).

Маршрут (цикл) коммивояжера

$$\tau = \langle 1, i_1, i_2, \dots, i_r, n, j_1, j_2, \dots, j_{n-r-2} \rangle$$

называется пирамидальным, если

$$i_1 < i_2 < \dots < i_r \text{ и } j_1 > j_2 > \dots > j_{n-r-2}.$$

Другими словами, коммивояжер отправляется из города под номером 1, посещает некоторые города в порядке возрастания номеров, после чего достигает города с номером  $n$  и возвращается в город 1, посещая оставшиеся города в порядке убывания номеров. Пример для  $n = 9$  приведен на рис. 1.

Также стоит отметить еще один класс циклов — пирамидальные циклы с шагами назад. Класс является расширением пирамидальных и как и простые пирамидальные циклы полиномиально разрешим и имеет различные ограничения на матрицу расстояний.

Пусть  $\tau$  — гамильтонов цикл. Обозначим вершину, следующую за  $i$ -той, как  $\tau(i)$ , а  $\tau^{-1}(i)$  — как предшествующую. Вершина  $i$  удовлетворяющая условию  $\tau^{-1}(i) < i$  и  $\tau(i) < i$  называется пиком. Вершиной с шагом назад является вершина  $i$ , для которой:

$$\tau^{-1}(i) < i, \tau(i) = i - 1 \text{ и } \tau^2(i) > i,$$

или

$$\tau^{-2}(i) > i, \tau^{-1}(i) = i - 1 \text{ и } \tau(i) < i.$$

Настоящим пиком называется такой пик, который не является пиком с шагом назад. Тогда пирамидальный цикл с шагами назад — это гамильтонов цикл, в котором только один настоящий пик —  $n$  [4].

Пирамидальные циклы, как и пирамидальные циклы с шагами назад, обладают двумя замечательными свойствами. Во-первых, пирамидальный цикл минимальной длины может быть найден с помощью динамического программирования за время  $O(n^2)$  при том, что общее число допустимых пирамидальных циклов экспоненциально по  $n$ . Во-вторых, известны простые и достаточно естественные ограничения для матрицы расстояний, которые гарантируют существование маршрута коммивояжёра минимальной длины, являющегося пирамидальным [5].

### Построение графа многогранника

Для генерации всех вершин многогранников простых пирамидальных циклов была использована кодировка 0/1 вектором длины  $n - 3$ . Координаты вектора с 3 до  $n - 1$ , каждая соответствует одной из вершин графа. 1 означает, что соответствующая вершина входит в пирамидальный цикл по направлению возрастания, 0 — по направлению убывания. Соответственно, общее число вершин составляет  $2^{n-3}$ . Пример кодирования для  $n = 8$  приведен на рис. 2. Генерация векторов для всех простых пирамидальных циклов сводится к задаче полного перебора.

В качестве кодировки для пирамидальных циклов с шагами назад так же была использована кодировка 0/1 вектором длины  $n - 3$  с единственным допущением в виде обозначения пика с шагом назад, который обозначается символом « $\wedge$ ». Пример кодирования для  $n = 7$  приведен на рис. 3. Построение таких векторов напрямую

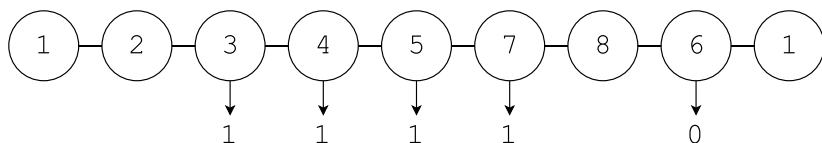


Рис. 2: Кодирование пирамидальных циклов 0/1 вектором

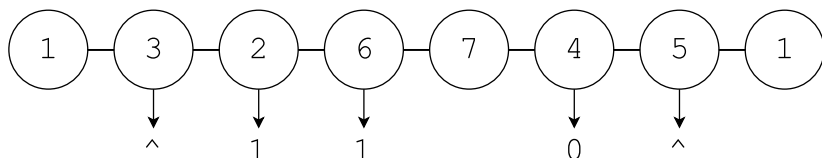


Рис. 3: Кодирование пирамидальных циклов с шагами назад 0/1 вектором

зависит от метода генерации самих циклов. В исследовании применялся рекурсивный подход, основная функция которого описана на рис. 4.

Существует ряд программ предоставляющих возможность построения полиэдрального графа, а также ассоциированного многогранника задачи коммивояжера. В рамках исследования использовалась программа `polymake` [6], которая позволила получить результаты отраженные в таблице 1. Таблица состоит из следующих колонок:

- Число городов — количество вершин в маршруте коммивояжера.
- Размерность — количество ребер в маршруте.
- Число вершин — количество вершин в полиэдральном графе для простых пирамидальных циклов и пирамидальных циклов с шагами назад.
- Макс. клика — значения плотности графа для простых пирамидальных циклов и пирамидальных циклов с шагами назад.
- Диаметр — значение диаметра графа для простых пирамидальных циклов и пирамидальных циклов с шагами назад.

Стоит отметить, что полученные максимальные значения количества городов 11 и 7, для простых пирамидальных циклов и пирамидальных циклов с шагами назад соответственно, не является

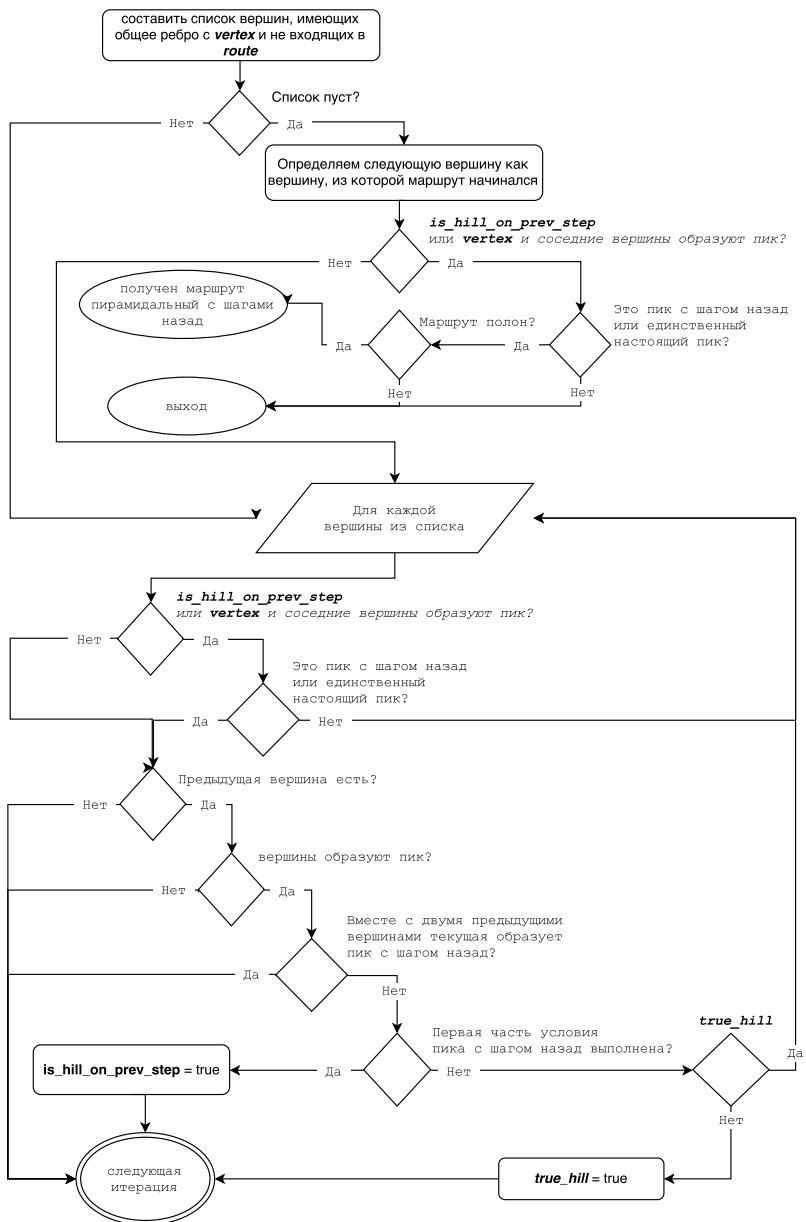


Рис. 4: Алгоритм генерации пирамидальных циклов с шагами назад.

ограничениями со стороны программного или аппаратного обеспечения, а являются ни чем иным как значениями полученным за ограниченное время.

Число городов	Размерность	Число вершин	Макс. клика	Диаметр графа
5	10	4 / 16	4 / 6	1 / 2
6	15	8 / 44	6 / 6	2 / 2
7	21	16 / 120	8 / 10	2 / 2
8	28	32 / 328	10 / -	2 / -
9	36	64 / 896	12 / -	2 / -
10	45	128 / 2448	14 / -	2 / -
11	55	256 / 6688	16 / -	2 / -

Таблица 1: значения диаметра и максимальной клики для разного количества городов

## Заключение

Приведенные в таблице результатов данные позволяют провести связь между количеством городов и диаметром. Когда число городов больше 5 и маршрут коммивояжера является пирамидальным, то диаметр полиэдрального графа равен 2. Что касается пирамидальных циклов с шагами назад, эта величина всегда равняется 2. Таким образом, можно убедиться в том, что гипотеза Грётчела и Падберга о диаметре полиэдрального графа [1] выполняется для всех проверенных случаев этих двух классов пирамидальных циклов.

Полученные значения плотности графа многогранника демонстрируют принципиальное отличие от экспоненциальной плотности многогранника коммивояжера [7]. Напомним, что плотность полиэдрального графа служит нижней оценкой на трудоемкость в классе алгоритмов прямого типа [2; 3].

При подготовке данной статьи использовался электронный документ [8].

**Список литературы**

1. Grötschel M., Padberg M. W. Polyhedral theory // The traveling salesman problem: A guided tour of combinatorial optimization / ed. by E. Lawler [et al.]. Wiley New York, 1985. P. 251–305.
2. Бондаренко В. А., Максименко А. Н. Геометрические конструкции и сложность в комбинаторной оптимизации. М. : ЛКИ, 2008. 184 с.
3. Bondarenko V., Nikolaev A. On graphs of the cone decompositions for the min-cut and max-cut problems // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 2016. Vol. 2016. Article ID 7863650.
4. Enomoto H., Oda Y., Ota K. Pyramidal tours with step-backs and the asymmetric traveling salesman problem // Discrete applied mathematics. 1998. Vol. 87, no. 1–3. P. 57–65.
5. Burkard R. E. [et al.]. Well-solvable special cases of the traveling salesman problem: a survey // SIAM review. 1998. Vol. 40, no. 3. P. 496–546.
6. Gawrilow E., Joswig M. Polymake: a framework for analyzing convex polytopes // Polytopes—combinatorics and computation. 2000. P. 43–73.
7. Бондаренко В. А. Неполиномиальная нижняя оценка сложности задачи коммивояжера в одном классе алгоритмов // Автоматика и телемеханика. 1983. № 9. С. 45–50.
8. Куликов С. Как писать научные статьи и тексты. URL: [http://svyatoslav.biz/education/scientific\\_texts/](http://svyatoslav.biz/education/scientific_texts/) (дата обр. 26.05.2018).